SOBRE LAS SOLUCIONES HOMOGRAFICAS DEL PROBLEMA DE LOS N CUERPOS

C. A. Altavista

FCAGLP

RESUMEN: La aplicación del método mediante el cual se reobtuvieron las soluciones homográficas equilaterales y colineales para el caso de tres cuerpos, permite reencontrar de inmediato resultados conocidos para N>3, así como conseguir una generalización de las mismas.

Euler y Lagrange fueron los primeros en estudiar soluciones particulares del problema de los N cuerpos (N = 3). En efecto estos autores demostraron la existencia de configuraciones permanentes colineales y equilaterales respectivamente, en el caso de tres cuerpos, al considerar el movimiento de una masa despreciable con respecto a otras dos finitas, tomando como referencia un sistema de coordenadas sinódicas. Por su naturaleza estas soluciones reciben el nombre de homotéticas (rotaciones puras).

La solución del caso general donde además de rotaciones se tienen en cuenta dilataciones (pulsaciones), corresponde a principios de este siglo cuando fueron descubiertos correspondientemente las soluciones equilaterales y colineales del problema de los tres cuerpos y con posterioridad las soluciones colineales en el caso de N cuerpos y para N = 4, la configuración del tetraedro regular.

El objeto de este trabajo es completar uno anterior, en el cual mostramos un método elemental para originar soluciones homográficas colineales y equilaterales para N = 3. La elección del sistema de referencia es inmaterial y por lo tanto, escribiremos las ecuaciones diferenciales del movimiento con respecto a un sistema "heliocéntrico" de coordenadas. Tenemos pues:

$$(1) \qquad \frac{d^2\overline{R}_i}{dt^2} + k^2\mu \frac{\overline{R}_i}{r_i^3} = k^2 \sum_{i\neq j} mj \left(\frac{\overline{R}_i - \overline{R}_j}{\Delta_{ij}^3} - \frac{R_i}{r_j^3} \right) ,$$

donde indicamos con $\overline{R}_i$, $\overline{R}_j$, los vectores de posición "heliocéntricos" de los planetas, k^2 la constante gaussiana, $\mu = m_o + m_i$, Δ_{ij} los respectivos módulos de las distancias entre los planetas y $r_j = |\overline{R}_j|$.

Considerando ahora la expresiones vectoriales (instantáneas) del problema de los dos cuerpos:

$$\ddot{\overline{R}}_i \times \overline{H}_i = \mu \dot{\overline{\mathcal{U}}} ; \overline{\mathcal{U}} = \frac{\overline{R}}{r} ,$$

donde:

$\overline{H}_i$ es el producto vectorial que da la velocidad areal instantánea, $\mu = k^2(m_o + m_i)$.

Si ahora multiplicamos vectorialmente la (1) por H_1 obtenemos las nuevas ecuaciones:

$$\ddot{\overline{R}}_i \times \overline{H}_1 = k^2 \sum_{j\neq i} mj \left(\frac{1}{\Delta_{ij}^3} - \frac{1}{r_j^3} \right) \quad (\overline{R}_i \times \overline{H}_1)$$

El exámen de los factores del segundo miembro para el caso de N = 3 nos llevó a reobtener las soluciones homográficas colineales y equilaterales, al desarrollar el triple producto vector del primer miembro que nos condujo a las relaciones:

$R_i \times \dot{R}_i = \bar{K}$ (constante) al anular independientemente los factores mencionados.

La extensión al caso general de los N cuerpos es inmediata para el caso de las soluciones colineales. Basta anular todos los factores (identicamente, $R_i \times r_l$, para l=i)

En lo que respecta al caso espacial n = 4, un tetraedro regular, deben considerarse ahora los factores

$$\frac{1}{\Delta_{ij}^3} - \frac{1}{r_j^3}$$

en donde se ponen respectivamente igual a cero todas esas expresiones y se escriben las correspondientes expresiones que resultan en los primeros miembros:

$$\frac{d}{dt}(\bar{R}_i x \dot{\bar{R}}_i) = 0,$$

que integradas dan las velocidades areales instantáneas.

Consideraciones elementalès conducen a verificar las conjeturas de A. Wintner (1941), cuando se aplica el principio de órbita instantánea, en los siguientes casos:

a) Cuando N masas iguales están ubicadas en los vértices de un polígono de N lados (obviamente sale N = 6).
b) Cuando N - 1 masas iguales estan ubicadas en los vértices de un polígono regular de N - 1 lados y una masa arbitraria en el centro (masa finita), (obviamente N = 7)

Con respecto a la estabilidad de las soluciones corresponde destacar que la naturaleza de las órbitas instantáneas depende del valor inicial de la constante de la energía para un cierto instante t^o. Si esa constante es negativa, se tendrán permanentemente configuraciones (instantáneas) elípticas. Si es nula, las órbitas serán parabólicas y si es positiva, hiperbólicas.

En el caso de constantes iniciales negativas la estabilidad queda asegurada por el teorema que establece que para $t \to \infty$, no existen colisiones simultáneas en el problema de los N cuerpos.

La ventaja del método expuesto queda explícita en virtud que es posible determinar la órbita instantánea, cuando se conocen las condiciones iniciales, utilizando las fórmulas clásicas de Gauss para el cálculo de perturbaciones especiales.

El uso del método de perturbaciones generales tampoco ofrece ninguna dificultad.

Este trabajo será publicado "in-extenso" en otro lugar.

El autor agradece al Dr. H. Vucetich y al Ingeniero F. Marsicano por los comentarios y sugestiones que le han formulado.

REFERENCIAS

Wintner, A. 1941: The Analytical Foundations of Celestial Mechanics, Princeton.